Compito di Geometria e algebra lineare del 3 giugno 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to W$ una applicazione lineare.

(1) Definisci il nucleo $N(f)$ di f e mostra che è un sottospazio vettoriale di V.
(2) Definisci l'immagine di f e mostra che è un sottospazio vettoriale di W.

Esercizio 2. Considera la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale formato dalle matrici reali 2×2. Considera l'endomorfismo $f\colon M(2) \to M(2)$ definito da

$$f(X) = A\,{}^{\mathrm{t}}X.$$

(1) Determina se f sia diagonalizzabile e in caso affermativo esibisci una base di autovettori.
(2) Calcola $f^4(X)$ per

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il simbolo f^4 indica come di consueto la composizione $f \circ f \circ f \circ f$.

Esercizio 3. Considera in $\mathbb{R}^3$ il piano affine $\pi = \{z = 1\}$ e la retta affine

$$r = \begin{cases} x - z &= -2 \\ \quad y &= 1 \end{cases}$$

Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $r \subset f(\pi)$.

Esercizio 4. Considera la famiglia di coniche dipendenti da un parametro

$$C_k = \{x^2 + 2kxy + y^2 + 2kx + 2ky + 2k - 2 = 0\}.$$

(1) Determina il tipo di conica per ogni k.
(2) Determina i centri di simmetria per C_k per ogni k.
(3) Per tutti i k per cui C_k è una ellisse, determina il rapporto fra l'asse maggiore e quello minore al variare di k.
(4) Per tutti i k per cui C_k è una iperbole, determina gli asintoti.

1. Soluzioni

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2.

(1) La matrice associata a f nella base canonica di $M(2)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2 - 2)$ ed ha quattro radici distinte $1, 2, \pm\sqrt{2}$. Quindi f è diagonalizzabile. Una base di autovettori è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalori rispettivi $1, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

(2) Abbiamo $X = v_1 - v_2$. Quindi $f(v_1 - v_2) = v_1 - 2v_2$ e iterando $f^n(v_1 - v_2) = v_1 - 2^n v_2$. Quindi

$$f^4(X) = v_1 - 2^4 v_2 = \begin{pmatrix} -15 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. La retta ed il piano si intersecano in $P = (-1, 1, 1)$. Sposto l'origine in P. Nelle nuove coordinate r e π diventano

$$r = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \{z' = 0\}.$$

Posso usare una rototraslazione di asse $\operatorname{Span}(e_2)$, di angolo $\frac{\pi}{4}$ e di passo 1. Questa non ha punti fissi e $f(\pi) \supset r$. La scrivo:

$$f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate originali si ottiene

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questa non è l'unica soluzione possibile.

Esercizio 4. Scriviamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 2k-2 \end{pmatrix}$$

(1) Troviamo $\det A = 1 - k^2$ e $\det \bar{A} = 2(k-1)$. Quindi per $k \neq 1$ è non degenere. Usando Jacobi si vede che è sempre indefinita per $k \neq 1$. Quindi è una ellisse per $|k| < 1$, parabola per $k = -1$ e iperbole per $|k| > 1$. Per $k = 1$ l'equazione diventa

$$C_1 = \{x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0\} = \{(x+y)(x+y+2) = 0\}$$

e quindi C_1 è unione di due rette parallele.

(2) Per $k \neq \pm 1$ troviamo il centro

$$-\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}.$$

Per $k = -1$ non ci sono centri. Per $k = 1$ la retta $x + y + 1 = 0$ è formata da centri.

(3) Gli autovalori di A sono $1 \pm k$ e gli autovettori corrispondenti sono ortogonali per il teorema spettrale. Quindi per ogni $|k| = 1$ esiste un sistema di riferimento in cui l'ellisse ha la forma

$$(1+k)x^2 + (1-k)y^2 = C$$

per qualche $C > 0$. Dividendo per C otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = C/(1+k)$ e $b^2 = C/(1-k)$. Il rapporto fra gli assi è dunque

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}.$$

(4) I punti all'infinito sono le soluzioni di

$$x^2 + 2kxy + y^2 = 0$$

e cioè $(-k \pm \sqrt{k^2-1}, 1)$. Quindi gli asintoti sono

$$\left\{ -\frac{1}{k+1} \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -k \pm \sqrt{k^2-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$